DS de mathématiques n°8

DL, espaces vectoriels, dimension, applications linéaires – Corrigé

Noté sur 103 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 1/5.

/15 1 Pour s'échauffer

1) On pose $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. On rappelle que $\sqrt[3]{u} = u^{1/3}$.

/1,5 **a)** Déterminer le domaine de définition de f.

$f(x)$ n'a un sens que si $\sqrt[3]{1+x}-1 \neq 0$. Or,

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{1+x}-1 = 0 \\ \iff & \sqrt[3]{1+x} = 1 \\ \iff & 1+x = 1 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $D_f = \mathbb{R}^*$.

/4 **b)** Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{1+\frac{x}{3}-\frac{1}{9}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)-1} \\ &= \frac{x}{\frac{1}{3}-\frac{x}{9}+\underset{x\to 0}{o}(x)} \\ &= 3\times\frac{x}{1-\frac{x}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x)} \\ &= 3\times\frac{x}{1+X} \end{aligned}$$

avec $X = -\dfrac{x}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x\times\left(1-X+\underset{X\to 0}{o}(X)\right) \\ &= 3x\times\left(1+\frac{x}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x)\right) \\ &= \boxed{3x+x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \end{aligned}$$

/2 **c)** En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de $f(0)$. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable et préciser la valeur de $f'(0)$.

Par le DL qui précède, on a $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=0}$.

Comme f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$, f est dérivable et $\boxed{f'(0)=2}$ d'après le DL qui précède.

/2,5 **d)** Préciser la position relative de f par rapport à sa tangente en 0. Est-ce que f admet un extremum local en 0 ?

La tangente de f en 0 est la droite d'équation $y = 3x$. De plus,

$$f(x)-3x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

Comme x^2 est positif, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Comme $f'(0) \neq 0$, 0 n'est pas un point critique de f et n'est donc pas un extremum local.

/5 **2)** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)$

Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\setminus\{0\}$.

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - x^2}{x^2\operatorname{sh}^2 x}$$

D'une part, $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $x^2\operatorname{sh}^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2x^2 = x^4$. D'autre part,

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 x - x^2 &= \left(x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2-x^2 \\ &= x^2+\frac{x^4}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)-x^2 \\ &= \frac{x^4}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{3} \end{aligned}$$

On en déduit par quotient d'équivalent que

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

/19,5

2 Autour des DL de la fonction tangente

1) Justifier que tangente admet un DL à l'ordre 7 en 0 et que ce DL est de la forme :

$$\tan x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$$

/4 avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- 1,5 pour la justification de l'existence du $\mathrm{DL}_7(0)$.
- 1 pour l'utilisation de l'imparité de tangente.
- 1,5 pour justifier que le coefficient de degré 1 du DL est 1.

La fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^7$, donc par la formule de Taylor-Young, elle admet un $\mathrm{DL}_7(0)$. De plus, tangente est impaire, donc son $\mathrm{DL}_7(0)$ est impair. On en déduit que

$$\tan x = dx + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Montrons enfin que $d = 1$. On sait que $d = \tan'(0)$. Or, $\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$. D'où la forme voulue.

(Pour justifier que $d = 1$, on pouvait aussi invoquer le fait que $\tan x \sim x$, de sorte que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, ce qui donne $d = 1$ grâce à la relation ci-dessus)

Dans la suite, on propose de calculer le DL à l'ordre 7 en 0 de la fonction tangente de plusieurs façons.

2) a) En utilisant la question **1)**, exprimer la forme du DL à l'ordre 6 en 0 de $1+\tan^2(x)$ en fonction des réels a, b, c.

/2,5

$$\begin{aligned}1+\tan^2 x &= 1+\left(x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\right)^2\\ &= 1 + x^2 + a^2x^6 + 2ax^4 + 2bx^6 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\\ &= \boxed{1 + x^2 + 2ax^4 + (a^2+2b)x^6 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}\end{aligned}$$

b) En déduire une autre expression du DL à l'ordre 7 en 0 de $\tan(x)$ en fonction des réels a, b, c.

/2,5

On intègre terme à terme le DL de $1+\tan^2 x$:

$$\begin{aligned}\tan x &= \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2a}{5}x^5 + \frac{(a^2+2b)}{7}x^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\\ &= \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2a}{5}x^5 + \frac{(a^2+2b)}{7}x^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)}\end{aligned}$$

/2,5

c) En déduire a, b et c. Conclure.

En plus de la question précédente, on sait que

$$\tan x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$$

Par unicité du DL, on en déduit que :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}\\ b = \frac{2a}{5}\\ c = \frac{a^2+2b}{7}\end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{3}\\ b = \frac{2}{15}\\ c = \frac{\frac{1}{9}+\frac{4}{15}}{7} = \frac{17}{315}\end{cases}$$

Finalement, le $\mathrm{DL}_7(0)$ de tangente est :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)}$$

2) Dans cette question, pour éviter des calculs trop lourds, on ne déterminera que le DL à l'ordre 5 en 0 de tangente.

/5

a) Calculer le DL à l'ordre 6 en 0 de $\ln(\cos x)$.

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\right)\\ &= \ln(1+X)\end{aligned}$$

avec $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1+X) \\
&= X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \underset{X\to 0}{o}(X^3) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^3 \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{x^6}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \left(-\frac{1}{24\times 5\times 6} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{24}\left(-\frac{1}{30} + \frac{1}{2} - 1\right)x^6 + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{16}{24\times 30}x^6 + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\
&= \boxed{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{90}x^6 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)}
\end{aligned}$$

/3 **b)** Conclure.

On remarque que la dérivée de $f : x \mapsto \ln(\cos x)$ est $f' : x \mapsto -\frac{\sin x}{\cos x}$, i.e. $f' = -\tan$. Comme tan admet un $\mathrm{DL}_5(0)$, il en va de même pour f' et on peut l'obtenir en dérivant le $\mathrm{DL}_6(0)$ de f :

$$-\tan x = -x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

donc

$$\tan x = \boxed{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

3 Morphismes dont le noyau et l'image sont supplémentaires

/43,5

On s'intéresse au problème suivant : étant donné E un espace vectoriel de dimension finie notée n, on s'intéresse aux applications $f \in \mathcal{L}(E)$ qui

vérifient la condition suivante notée (S) :

$$\text{(S)} \quad E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$$

Le but de l'exercice est d'étudier des cas particuliers.

/1,5 **1)** Soit p un projecteur de E. Que représentent $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$? En déduire si p vérifie ou non la condition (S).

$\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont les éléments caractéristiques de p. Par définition d'un projecteur, ces deux espaces sont supplémentaires. Donc p vérifie (S)

/3 **2)** Justifier qu'une symétrie s de E vérifie toujours la condition (S).

Comme s est une symétrie, s est un automorphisme. En particulier, s est injective donc $\mathrm{Ker}(s) = \{0_E\}$, et s est surjective donc $\mathrm{Im}\, s = E$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$ sont supplémentaires car $\{0_E\} \cap E = \{0_E\}$ et $\{0_E\} + E = E$. D'où s vérifie la condition (S).

/3 **3)** Dans cette question, $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f est l'endomorphisme défini par $f(P) = P'$. Montrer que f ne vérifie pas la condition (S).

(Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim \mathbb{R}_2[X]$, donc pour prouver que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas supplémentaires, on doit nécessairement avoir $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$. On va donc chercher un polynôme non nul de $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$, ce qui n'est pas dur à trouver...)

On pose $Q = 1$. Montrons que $Q \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$.

- Comme $Q' = 0$, on a bien $Q \in \mathrm{Ker}\, f$
- Comme $Q = f(X)$, on a bien $Q \in \mathrm{Im}\, f$.

Ainsi, $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$. On en conclut que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas en somme directe, donc ne sont pas supplémentaires.

4) Dans cette question, $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : E \to E$ est l'application définie par $f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$.

/3,5 **a)** Justifier que f est bien définie et montrer que f est linéaire.

Étant donné $P \in E$, on a $\deg P \leq 3$. Par suite :

$$\begin{aligned}
\deg(XP') &= \deg X + \deg P' \\
&\leq 1 + \deg P - 1 \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\deg\left((X^2-1)P''\right) &= \deg(X^2-1)+\deg P'' \\ &\leq 2+\deg P-2 \\ &\leq 3\end{aligned}$$

Ainsi, $f(P)$ est la somme de polynômes de degré au plus 3. D'où $f(P)$ est un polynôme et $\deg(f(P)) \leq 3$. Ainsi, $f(P) \in E$.

Montrons que f est linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$. On a donc

$$\begin{aligned} f(\alpha P+\beta Q) &= \frac{1}{2}(X^2-1)\left(\alpha P+\beta Q\right)''-X(\alpha P+\beta Q)'+(\alpha P+\beta Q) \\ &= \frac{1}{2}(X^2-1)\left(\alpha P''+\beta Q''\right)-X(\alpha P'+\beta Q')+(\alpha P+\beta Q) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{2}(X^2-1)P''-XP'+P\right)+\beta\left(\frac{1}{2}(X^2-1)Q''-XQ'+Q\right) \\ &= \alpha f(P)+\beta f(Q)\end{aligned}$$

/1,5

b) Déterminer explicitement l'image par f du polynôme $P = aX^3 + bX^2+cX+d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

On a

$$f(1) = 0-0+1 = 1$$

$$f(X) = -X+X = 0$$

$$f(X^2) = (X^2-1)-2X^2+X^2 = -1$$

$$\begin{aligned} f(X^3) &= \frac{1}{2}(X^2-1)\times 6X-3X^3+X^3 \\ &= X^3-3X\end{aligned}$$

Ainsi, par linéarité :

$$\begin{aligned} f(P) &= af(X^3)+bf(X^2)+cf(X)+df(1) \\ &= \boxed{aX^3-3aX-b+d}\end{aligned}$$

/3

c) Déterminer le noyau de l'application f. Montrer qu'il est de dimension 2.

Avec P défini à la question précédente :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f &\iff f(P)=0 \\ &\iff aX^3-3aX-b+d=0 \\ &\iff \begin{cases} a=0 \\ -b+d=0\end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=d\end{cases}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \left\{aX^3+bX^2+cX+d \in E \;\middle|\; a=0,\ b=d\right\} \\ &= \left\{dX^2+cX+d \;\middle|\; c,d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}(X^2+1, X)\end{aligned}$$

La famille (X^2+1, X) engendre donc $\operatorname{Ker} f$, et est libre car ses vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, c'est une base de $\operatorname{Ker} f$: $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

/3

d) Préciser la dimension de l'image de f, puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.

Par le théorème du rang, on a

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = 4-2 = \boxed{2}$$

Ensuite, on sait que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) \\ &= \operatorname{Vect}(1, 0, -1, X^3-3X) \\ &= \operatorname{Vect}(1, X^3-3X) \qquad \text{car } -1 = (-1)\times 1\end{aligned}$$

Par le même argument que précédemment, la famille $(1, X^3-3X)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

/1,5

e) On note $G = \left\{Q \in E \;\middle|\; Q'(1) = Q'(-1) = 0\right\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

Montrons que G est un s.e.v. de E.

— Le polynôme $Q = 0$ vérifie bien $Q'(1) = Q'(-1) = 0$, donc $0 \in G$.

— Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in G$. Montrons que $\alpha P + \beta Q \in G$.

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)'(1) &= \alpha P'(1) + \beta Q'(1) \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

De même, on montre que $(\alpha P + \beta Q)'(-1) = 0$. D'où $\alpha P + \beta Q \in G$.

Finalement, G est un s.e.v. de E.

f) On pose $F = \text{Vect}(X, X^2)$. Montrer que F et G sont en somme directe. En déduire que $\dim G \leq 2$.

/4

Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $P \in F \cap G$. Montrons que $P = 0$. Comme $P \in F$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $P = \lambda X + \mu X^2$. Comme $P \in G$ et $P' = \lambda + 2\mu X$, on a

$$P'(1) = \lambda + 2\mu = 0$$

$$P'(-1) = \lambda - 2\mu = 0$$

On en déduit facilement que $\lambda = \mu = 0$. D'où $\boxed{P = 0}$. Ainsi, F et G sont en somme directe. On en déduit que

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Or, par des arguments déjà vus, on sait que $\dim F = 2$. De plus,

$$\dim(F \oplus G) \leq \dim E = 4$$

d'où

$$\dim G = \dim(F \oplus G) - \dim F \leq 4 - 2 = \boxed{2}$$

/4

g) Montrer que $\text{Im} f \subset G$. En déduire que $G = \text{Im}(f)$.

Montrons que $\text{Im} f \subset G$.

— On pose $Q = 1$. Il est clair que $Q'(1) = Q'(-1) = 0$, donc $1 \in G$.

— On pose $Q = X^3 - 3X$. Il est clair que $Q'(1) = Q'(-1) = 0$, donc $X^3 - 3X \in G$.

On en déduit que $\text{Vect}(1, X^3 + 3X) \subset G$, donc $\text{Im} f \subset G$ par la question **d)** .

Comme $\text{Im} f \subset G$ et que $\dim \text{Im} f = 2$, on a $\dim G \geq 2$. Comme $\dim G \leq 2$ par la question précédente, on a donc $\dim G = 2$. De plus, comme $\text{Im} f \subset G$ et qu'il y a égalité des dimensions, on en déduit que

h) Montrer (sans utiliser la question suivante...) que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

/4

On a vu en questions **c)** et **d)** que

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = 2 + 2 = 4 = \dim E$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0\}$. Soit $P \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$. Comme $P \in \text{Ker} f$, par la question **c)** , il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = a(X^2 + 1) + bX$$

Comme $P \in \text{Im} f$, on a $P \in G$, donc

$$P'(1) = 2a + b = 0$$

$$P'(-1) = -2a + b = 0$$

d'où on trouve facilement $a = b = 0$. Ainsi, $P = 0$. Finalement, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

/3

i) Montrer que f est en fait un projecteur.

Comme f est linéaire, il suffit de montrer que $f \circ f = f$. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. Par la question **b)** ,

$$\begin{aligned}f(f(P)) =& f(aX^3 - 3aX - b + d) \\ =& f(AX^3 + B + CX + D) \qquad \text{avec} \begin{cases} A = a \\ B = 0 \\ C = -3a \\ D = -b + d \end{cases} \\ =& AX^3 - 3AX - B + D \\ =& aX^3 - 3aX - 0 - b + d \\ =& f(P)\end{aligned}$$

D'où $f \circ f = f$ par arbitraire sur P.

5) On note enfin $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x,y,z,t) = (0, -3y, 3x-3z, y)$.

/3 **a)** Déterminer le noyau et l'image de f (on donnera la dimension et une base à chaque fois).

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} -3y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x = z,\ y = 0 \right\} \\ &= \left\{ (z,0,z,t) \,\middle|\, z,t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Par des arguments déjà vus, la famille $((1,0,1,0),\ (0,0,0,1))$ est une base de $\operatorname{Ker} f$, qui est donc de dimension 2. On détermine maintenant $\operatorname{Im} f$:

$$f(1,0,0,0) = (0,0,3,0) \qquad f(0,1,0,0) = (0,-3,0,1)$$

$$f(0,0,1,0) = (0,0,-3,0) \qquad f(0,0,0,1) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, 0_{\mathbb{R}^4} \right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que la famille $((0,-3,0,1),\ (0,0,3,0))$ est une base de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension 2.

/3 **b)** Vérifier que f satisfait la condition (S).

Comme

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

il suffit de vérifier que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Soit $u = (x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Comme $u \in \operatorname{Im} f$, on a

$$u = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\lambda \\ 3\mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Comme $u \in \operatorname{Ker} f$, on a

$$\begin{aligned} & f(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \implies & f(0, -3\lambda, 3\mu, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \implies & (0, 9\lambda, -3\mu, -3\lambda) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \implies & \lambda = \mu = 0 \end{aligned}$$

D'où $u = 0_{\mathbb{R}^4}$. Ainsi, f vérifie la condition (S).

/2,5 **c)** Montrer toutefois que f n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

Comme $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, on en déduit que f n'est pas injective. Ce n'est donc pas un automorphisme. Supposons par l'absurde que f est un projecteur. Alors $\operatorname{Im} f = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, f(u) = u \right\}$. Or, on a vu que $(0,0,3,0) \in \operatorname{Im} f$. Or,

$$f(0,0,3,0) = (0,0,-3,0) \neq (0,0,3,0)$$

Absurde. Donc f n'est pas un projecteur.

/25 4 Après l'échauffement...

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On suppose que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, puis que :

$$\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$$

/11,5

1,5 pour montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

6 points pour l'égalité concernant les noyaux (3,5 pour le sens direct, 2,5 pour le sens réciproque)

4 points pour l'égalité concernant les images (2 pour chaque sens)

— L'application $p \circ q$ est linéaire par composition. De plus,

$$\begin{aligned}(p \circ q) \circ (p \circ q) &= (p \circ q) \circ (q \circ p) \\ &= p \circ q^2 \circ p \\ &= p \circ (q \circ p) \qquad \text{car } q \text{ est un projecteur} \\ &= (p \circ p) \circ q \\ &= p \circ q \qquad \text{car } p \text{ est un projecteur}\end{aligned}$$

— Montrons que $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p \circ q)$. Soit $u \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$. Montrons que $p(q(u)) = 0_E$. Par hypothèse, on a

$$u = u_{Kp} + u_{Kq} \qquad \text{avec } u_{Kp} \in \operatorname{Ker} p \quad \text{et} \quad u_{Kq} \in \operatorname{Ker} q$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}p(q(u)) &= p(q(u_{Kp}) + q(u_{Kq})) \\ &= p(q(u_{Kp})) \\ &= q(p(u_{Kp})) \qquad \text{car } p \circ q = q \circ p \\ &= q(0_E) \\ &= 0_E\end{aligned}$$

D'où $u \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$.

— Montrons que $\operatorname{Ker}(p \circ q) \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$. Soit $u \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$. Montrons que

$$\exists a \in \operatorname{Ker} p \quad \exists b \in \operatorname{Ker} q \qquad u = a + b$$

On pose

$$u = u_{Kq} + u_{Iq} \qquad \text{avec } u_{Kq} \in \operatorname{Ker} q \quad u_{Iq} \in \operatorname{Im} q$$

de sorte que, comme $\operatorname{Im} q = \{v \in E \mid q(v) = v\}$,

$$0_E = p(q(u)) = p\left(q(u_{Kq}) + q(u_{Iq})\right) = p\left(0_E + u_{Iq}\right)$$

On pose ensuite

$$u_{Iq} = v + w \qquad \text{avec } v \in \operatorname{Ker} p \quad w \in \operatorname{Im} p$$

On a donc

$$0_E = p(q(u)) = p(u_{Iq}) = p(w) = w$$

D'où $w = 0_E$. On en déduit que $u_{Iq} = v \in \operatorname{Ker} p$. Ainsi,

$$u = u_{Kq} + u_{Iq} \in \operatorname{Ker} q + \operatorname{Ker} p$$

D'où $\operatorname{Ker}(p \circ q) \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$

Finalement, on a montré que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

— Montrons que $\operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Soit $u \in \operatorname{Im}(p \circ q)$. Montrons que $u \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Comme $p \circ q$ est un projecteur, on a :

$$(p \circ q)(u) = u$$

En particulier,

$$u = p(q(u)) \quad \text{donc } u \in \operatorname{Im} p$$

et comme $p \circ q = q \circ p$,

$$u = q(p(u)) \quad \text{donc } u \in \operatorname{Im} q$$

Ainsi, $u \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

— Montrons que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p \circ q)$. Soit $u \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Montrons que $u \in \operatorname{Im}(p \circ q)$, i.e. $\exists u' \in E \quad u = p(q(u'))$. Comme $u \in \operatorname{Im} p$, on a

$$u = p(u)$$

Comme $u \in \operatorname{Im} q$, on a

$$u = q(u)$$

Par suite,

$$u = p(u) = p(q(u))$$

D'où en posant $u' = u$, on a le résultat voulu.

2) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E. On suppose que

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$

/6 Montrer que les deux sommes ci-dessus sont des sommes directes.

On pose

$$n=\dim E \qquad \begin{cases} a=\dim \operatorname{Ker} f \\ b=\dim \operatorname{Im} f \end{cases} \qquad \begin{cases} c=\dim \operatorname{Ker} g \\ d=\dim \operatorname{Im} g \end{cases}$$

Par le théorème du rang, on a

$$n=a+b=c+d$$

De plus, comme $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g=E$, par la formule de Grassman :

$$n=a+c-\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$$

et de même,

$$n=b+d-\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$

En additionnant les deux dernières égalités, on obtient :

$$2n=a+b+c+d-\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)-\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$

Or, $a+b=c+d=n$, donc

$$0=-\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)-\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$

Comme une dimension est toujours positive, on en déduit que

$$\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)=\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)=0$$

Ce qui permet de conclure que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g=\{0_E\}$, donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$ sont en somme directe. Idem pour $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'application qui à un polynôme $P(X)$ associe $X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Vérifier que f est bien définie et est une symétrie.
/7,5 Déterminer précisément ses éléments caractéristiques.

— Montrons que f est bien définie. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrons que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose

$$P=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0$$

de sorte que

$$\begin{aligned} f(P) &= X^n\left(a_n\frac{1}{X^n}+\ldots+a_1\frac{1}{X}+a_0\right) \\ &= a_n+a_{n-1}X+\ldots+a_1X^{n-1}+a_0X^n \end{aligned}$$

Ainsi, $f(P)$ est bien un polynôme, et $\deg(f(P)) \leq n$. Ainsi, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

— Montrons que f est une symétrie. Comme f est linéaire, il suffit de montrer que $f \circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned} f(f(P)) &= f(Q) \qquad \text{avec } Q=X^nP\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^nQ\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^n \times \left(\frac{1}{X^n}P(X)\right) \\ &= P(X) \end{aligned}$$

D'où f est bien une symétrie.

— Les éléments caractéristiques sont, en notant id l'identité de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$F=\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}) \qquad G=\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})$$

Déterminons F ici. Soit $P=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} & f(P)=P \\ \iff & X^nP\left(\frac{1}{X}\right)=P(X) \\ \iff & a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_{n-1}X+a_n=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0 \\ \iff & \begin{cases} a_0=a_n \\ a_1=a_{n-1} \\ \vdots \\ a_n=a_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F=\left\{a_nX^n+\ldots+a_0 \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k=a_{n-k}\right\}$$

(Par exemple, si $n=3$, alors $F=\left\{aX^3+bX^2+bX+a \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R}\right\}$)

— Pour G, on trouve de manière similaire :

$$G=\left\{a_nX^n+\ldots+a_0 \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k=-a_{n-k}\right\}$$

(Par exemple, si $n=4$, alors $G=\left\{aX^4+bX^3-bX-a \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R}\right\}$)